PRESENTACIÓN

La matemática es un lenguaje, especialmente adecuado para describir las relaciones lógicas. El lenguaje corriente, por el contrario, es mucho menos preciso. El uso de símbolos para simplificar el lenguaje es de gran importancia en las matemáticas. Para solucionar problemas cotidianos mediante el álgebra es necesario trasladar el problema del lenguaje común al lenguaje algebraico.

Se denomina Álgebra a la parte de las matemáticas que se dedica en sus aspectos más elementales a resolver ecuaciones.

El lenguaje algebraico es una forma de traducir a símbolos y números lo que normalmente tomamos como expresiones particulares. De esta forma se pueden manipular cantidades desconocidas con símbolos fáciles de escribir lo que permite simplificar teoremas, formular ecuaciones e inecuaciones y el estudio de cómo resolverlas. Este lenguaje nos ayuda a resolver problemas matemáticos mostrando generalidades.

EL lenguaje algebraico nace en la civilización musulmana en el periodo de AL-Khwarizmi durante la edad media. Su función principal es establecer y estructurar un idioma que ayuda a generalizar las distintas operaciones que se desarrollen dentro de la aritmética donde solo ocurren los números y sus operaciones aritméticas elementales.

Esta unidad inicia con algunos conceptos básicos que te permitirán adquirir ideas claras sobre las ecuaciones, su grado y sus propiedades; posteriormente se da a conocerla forma de resolverlas con diversos ejemplos; y finalmente encontraras varios ejemplos de resolución de problemas y su comprobación. Esto te permitirá incrementar tus habilidades para un mejor desarrollo de tu razonamiento lógico.

UNIDAD 3: **Ecuaciones Lineales.**

Propósitos de la unidad:

Incrementar la capacidad del alumno para plantear problemas que conducen a ecuaciones lineales y su resolución por métodos algebraicos. Estudiar la noción de ecuación desde diversas perspectivas. Manejar su relación con las funciones lineales. Avanzar en el manejo del lenguaje algebraico.

3.1 Problemas que dan lugar a ecuaciones lineales en una incógnita. Su resolución por métodos informales.

Aprendizaje: El alumno Interpreta la expresión verbal o escrita de un problema y expresa la relación entre datos e incógnita por medio de la ecuación lineal correspondiente.

¿Qué hacer cuando nos piden resolver un problema?
Por lo general, debemos organizar los datos e interpretar la relación que existe entre ellos, para después realizar las operaciones necesarias tratando de dar solución al problema dado. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1) Un viajero realiza $\frac{2}{3}$ partes de un viaje en bicicleta, $\frac{1}{4}$ del resto en autobús y los 10 Km restantes caminando. ¿Cuántos kilómetros ha recorrido?



Solución:

Dato: En bicicleta: $\frac{2}{3}$ del total del camino, queda por recorrer $\frac{1}{3}$ del camino.

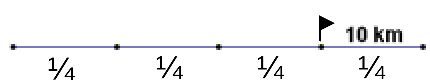
Dato: En autobús: $\frac{1}{4}$ de lo que queda del camino, es decir, $\frac{1}{4}(\frac{1}{3}) = \frac{1}{12}$ del total del camino lo recorre en autobús.

Lo que resta de todo el camino es: $\frac{1}{3} - \frac{1}{12} = 3/12 = \frac{1}{4}$ del total del camino.

Dato: Caminando recorre 10 km, es decir, 10 km = $\frac{1}{4}$ de todo el camino.

Entonces, concluimos que el camino que ha recorrido son 4 cuartos, y su longitud es de 4(10) = **40 kilómetros**.

Gráficamente la conclusión es:



Ejemplo 2) Si a un número se le suman 12 unidades, el resultado es 39. ¿Cuál es el número?

Solución:

Una forma de analizarlo es preguntándonos ¿qué número al sumarle 12 me da 39?, es el dato.
Y mentalmente hacemos la operación 39 – 12 = 27.
El número es 27.

Ejemplo 3) Si Juan tiene 35 años y su hijo Manuel tiene 12 años. ¿Cuántos años tienen que pasar para que la edad del padre sea el doble de la edad del hijo?

Solución:
Algunos podrían pensar en hacer una tabla e ir dando valores hasta llegar a la solución, como se muestra a continuación:

Edad de Juan	35	38	40	43	45	46
Edad del hijo	12	15	17	20	22	23

46 es el doble de 23

Han pasado 46 – 35 = 11 años.

Así como estos problemas hay muchos en los cuales no se necesita un planteamiento más elaborado para resolverlo, pero la mayoría de los problemas no son tan sencillos y se necesita una ecuación que lo represente, donde la solución de dicha ecuación dará la solución del problema. Por ejemplo:

Ejemplo 4) ¿Cuántos años tengo, si dentro de tres años tendré tres veces más años de los que tenía hace tres años?
Solución:
Para aclarar el problema ordenamos los datos en la siguiente tabla:

Pasado	Presente	Futuro
Mi edad hace 3 años	Mi edad actual	Mi edad dentro de 3 años
$x - 3$ años	x años	$x + 3$ años

Planteamiento:
Dentro de 3 años tendré 3 veces más de los que tenía hace 3 años.

$$x + 3 = 3(x - 3)$$

La solución de esta ecuación nos dará la respuesta pedida.

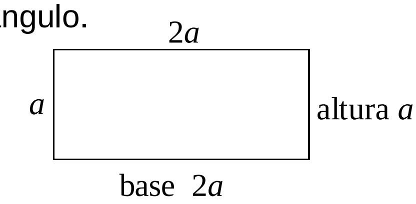
Ejemplo 5) Encuentra el número que cumple con la siguiente afirmación: “Si al doble de un número se le resta su mitad resulta 54”
Solución:
Supongamos que el número de que se habla es x.

El doble de x es: $2x$, y su mitad es: $\frac{x}{2}$

Entonces, el problema lo podemos plantear mediante la ecuación: $2x - \frac{x}{2} = 54$,

cuya solución nos dará el número buscado.

Ejemplo 6) La base de un rectángulo es el doble que su altura y su perímetro mide 30 cm. Encuentra las dimensiones del rectángulo.



Solución:

Trazamos el rectángulo cuya altura es a.

Su base es el doble de la altura: $2a$

Su perímetro es $a+a+2a+2a = 30$, su solución dará las dimensiones del rectángulo.

Ejemplo 7) En una reunión de 96 personas, si hay el doble de mujeres que de hombres y el triple de niños que de hombres y mujeres juntos. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay?

Solución:

Supongamos que el número de hombres es x, entonces:

El número de mujeres será $2x$

El número de niños: $\underbrace{\text{el triple número de}}_{3}$ niños que $\underbrace{\text{de hombres y mujeres juntos}}_{(x\ +\ 2x)}$.

La ecuación que resuelve el problema es: $x + 2x + 3(x + 2x) = 96$

Ejemplo 8) En un número de dos cifras que son consecutivas, la cifra mayor ocupa el lugar de las decenas y la menor es la de las unidades. Si el número es igual a seis veces la suma de las cifras. ¿Cuál es el número?

Solución:

Supongamos que una cifra es "x", la otra será "$x + 1$" ya que son consecutivas.

La cifra menor será "x", y ocupará el lugar de las unidades.

La cifra mayor es "$x + 1$", y ocupará el lugar de las decenas.

Recordando que todo número de dos cifras se puede escribir como una suma de la siguiente forma:

$69 = 6(10) + 9$, $37 = 3(10) + 7$, $82 = 8(10) + 2$, $94 = 9(10) + 4$

Entonces, nuestro número de dos cifras lo podemos escribir como: $(x + 1)(10) + x$

Y la frase "el número es igual a seis veces la suma de sus cifras" se puede plantear como: $(x + 1)(10) + x = 6(x + 1 + x)$

Es la ecuación que nos dará los dígitos del número buscado.

Ejercicio 3.1

I. Resuelve informalmente cada uno de los siguientes problemas.

1) Luís hizo un viaje en auto, en el cual consumió 20 litros de gasolina. El trayecto lo hizo en dos etapas: en la primera, consumió 2/3 de la gasolina que tenía el tanque, y en la segunda etapa, consumió la mitad de la gasolina que le queda. ¿Cuántos litros tenía el tanque de gasolina?

2) Se han consumido $\frac{7}{8}$ de un depósito de aceite. Si reponemos 38 litros, el depósito ha quedado lleno hasta sus 3/5 partes. Calcular la capacidad del depósito.

3) Si al doble de un número se le aumenta 13 unidades, el resultado es 49. Hallar el número.

4) El triple de un número disminuido en ocho unidades es 64. Encontrar el número.

5) Si se asignan 8.4 millones de barriles de petróleo diarios para el consumo de cierto país y solamente se utilizan 7.2 millones, ¿qué porcentaje de la asignación no se consume?

6) Un terreno se vendió en $680000. ¿Cuánto recibe el propietario si el vendedor tiene una comisión del 9% sobre el precio de venta?

7) Una niña se ha comido 100 uvas en 5 días, de forma que cada día comía 6 uvas más que el día anterior. ¿Cuántas uvas se comió el primer día?

8) Una persona gana $600.00 diarios, pero debe abonar $300.00 por cada día que falta al trabajo. Al cabo de 58 días recibe $22 200.00. ¿Cuántos días ha faltado a trabajar?

9) Un padre y su hijo van paseando juntos aunque en cada paso el padre recorre 4/5 de metro y el hijo recorre 1/3 de metro en cada paso. ¿Qué distancia han recorrido juntos, si sabemos que el hijo ha dado 700 pasos más que el padre?

10) A una fiesta asistieron 20 personas. María bailó con siete muchachos; Olga, con ocho; Vera, con nueve, y así hasta llegar a Nina, que bailó con todos ellos. ¿Cuántos muchachos había en la fiesta?

II. Para cada uno de los siguientes problemas **plantea** una ecuación cuya solución creas que resuelve el problema.

1) Las tres cuartas partes de la edad del padre de Juan excede en 15 años a la edad de éste. Hace cuatro años la edad del padre era doble de la edad del hijo. Hallar las edades de ambos.
Sugerencia: ordena tus datos de la siguiente forma:

	De Juan	Del padre de Juan
Edades de hace 4 años	w	$2w$
Edades actuales		

2) Si a un número se le resta su tercera parte y se le suma su quinta parte se obtiene como resultado 13. ¿De qué número se trata?

3) Si se aumenta en 3 m el lado de un cuadrado, su superficie aumenta en 75 m^2. ¿Cuál es la longitud del lado?

4) Encontrar tres números impares consecutivos tales que el triple de la suma del segundo y el tercero supera en 3 a siete veces el primer número.

5) La vida de Diofanto, notable matemático de la antigüedad. Todo lo que se conoce acerca de él ha sido tomado de la dedicatoria que figura en su sepulcro, inscripción compuesta en forma de ejerció matemático:

> ¡Caminante! Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto. Y los números pueden mostrar, ¡oh, milagro!, cuán larga fue su vida, cuya sexta parte constituyó su hermosa infancia. Había trascurrido además una duodécima parte de su vida, cuando de vello cubriese su barbilla. Y la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril. Pasó un lustro (5 años) más y le hizo dichoso el nacimiento de su precioso primogénito, que entregó su cuerpo, su hermosa existencia, a la tierra, que duro tan sólo la mitad de la de su padre. Y con profunda pena descendió a la sepultura, habiendo sobrevivido cuatro años a la muerte de su hijo. ¿Cuántos años había vivido Diofanto cuando le llego la muerte?

6) La cuarta parte de un terreno tiene sembrado maíz, los 4/7 del terreno están sembrados de trigo, y en el resto se han sembrado papas. El maíz ocupa 360 m^2 más que las papas. ¿Cuál es la superficie del terreno?

7) Los reyes de una dinastía tuvieron 9 nombre diferentes. La tercera parte de los reyes llevaron el primero de estos nombres, la cuarta parte el segundo, la octava parte el tercero y la doceava parte el cuarto; cada uno de los nombres restantes lo llevó un solo rey. ¿Cuántos fueron los reyes de la dinastía?

8) Dos llaves llenan juntas un depósito en 7.2 horas. Una de ellas lo llena en 12 horas. ¿En cuánto tiempo lo llena la otra?

9) Tres hermanas se han comido toda la fruta de un frutero y lo han hecho de la siguiente forma: la mayor se ha comido la mitad de la fruta más dos piezas; la segunda, la mitad del resto más dos piezas; y la tercera sólo ha podido comer 4

manzanas porque no quedaba más fruta. ¿Cuántas piezas de fruta había en el frutero?

10) Cierto día Paty horneó 120 pastelitos para repartir entre los niños de su colonia. Llegaron a la repartición 45 en total. Para no cortar algunos pastelitos en trozos, decidió dar 3 pastelitos a cada uno de los niños que tenían un parentesco con ella, y dos a cada uno de los demás niños. ¿Cuántos eran los niños con algún parentesco con ella?

3.2 Ecuaciones lineales en una incógnita.

Aprendizajes:

- ✓ *Comprende que las ecuaciones lineales en una incógnita, son un caso especial de igualdad entre expresiones algebraicas.*
- ✓ *Observa que cualquier forma que adopte una ecuación lineal, desde la más simple hasta las que involucran expresiones racionales, siempre puede reducirse, al simplificar términos semejantes o realizar las operaciones indicadas, a una ecuación de la forma* $\boldsymbol{ax + b = 0}$ *y con ello, resolverse fácilmente.*
- ✓ *Relaciona a las formas* $\boldsymbol{ax + b = 0}$ *y* $\boldsymbol{ax + b = c}$ *de la ecuación lineal como casos particulares de la Función Lineal* $\boldsymbol{y = ax + b}$*, correspondientes respectivamente, a los valores específicos de* $\boldsymbol{y=0}$ *y* $\boldsymbol{y=c}$*. Es decir, identificará a la ecuación lineal como un caso particular de una Función Lineal.*

Ya que practicamos como resolver problemas con métodos informales y como plantear algunos problemas, ahora vamos aprender cómo resolver o encontrar la solución de la ecuación que resolverá el problema.
Para esto empezaremos a analizar las formas de una ecuación.

> Una ecuación lineal en una incógnita es una expresión de la forma:
> $ax + b = 0$ con $a \neq 0$.

Esta expresión puede presentarse en diferentes formas:

a) Un caso especial de una igualdad entre expresiones algebraicas.

Por ejemplo:

$$8 + 3x = 7 - 2x$$
$$2x + 5 = 4x - 1 + 3(x + 2)$$
$$8(x + 3) - 9 = 2(x - 5) - 7(x + 3) + 4x$$

Si tenemos la igualdad entre cualesquiera expresiones algebraicas lineales, con las operaciones que permiten transformar las ecuaciones, siempre la podremos expresar de la forma: $ax + b = 0$ con $a \neq 0$

b) Una condición que debe satisfacer un número buscado.

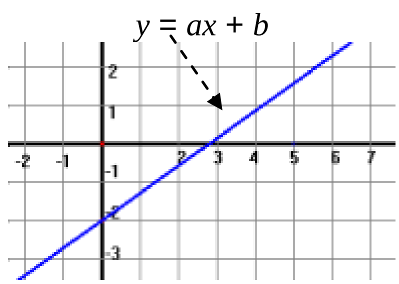
Hay ecuaciones que no son lineales, pero se pueden reducir a una ecuación lineal con cierta restricción.

Por ejemplo: $3 + \frac{6}{x} = 10 - \frac{1}{x}$ con $x \neq 0$

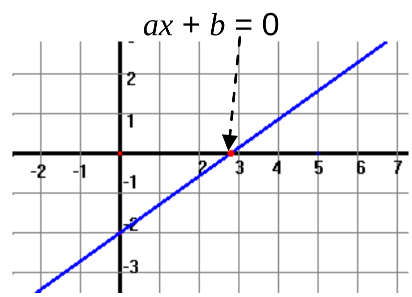
$5 - \frac{2}{x-1} = 8$ con $x \neq 1$

c) Un caso particular de una función lineal.

Ya vimos que una **Función Lineal** es de la forma $y = ax + b$ y una **ecuación lineal** con una variable es de la forma $ax + b = 0$, son muy similares, la diferencia en su forma es que en lugar de y se encuentra el 0. Pero sus conceptos son muy diferentes, observa la representación gráfica de cada una:



Función Lineal



Ecuación lineal

Consideraremos que $y = ax + b$ es la Función Lineal asociada a la ecuación $ax + b = 0$.

La principal diferencia es que la **Función Lineal** es la relación entre dos variables y su gráfica es una **línea recta**, mientras que una **ecuación lineal** con una variable representa el **valor** en donde la gráfica de su función lineal asociada corta al eje de las X.

3.3 Resolución de ecuaciones lineales en una incógnita, por métodos algebraicos:

Aprendizajes:

- ✓ *Reduce por medio de operaciones y propiedades válidas, una ecuación lineal a otra más simple de resolver.*
- ✓ *Maneja con soltura la prioridad de las operaciones y el significado del uso de paréntesis para modificar dicha prioridad.*

Resolver una ecuación será encontrar la solución, transformando la ecuación dada en otra equivalente, aplicando las operaciones que permiten transformar una ecuación en otra equivalente, hasta llegar al valor de la variable involucrada.

Las operaciones que permiten transformar una ecuación en otra equivalente son:

3.3.1 Operar con ambos miembros de la igualdad.

"Si sumamos, restamos, multiplicamos o dividimos por un número a un miembro de la ecuación, debemos hacer exactamente lo mismo al otro miembro de la igualdad para obtener una ecuación equivalente"

Nota: en el caso de la multiplicación y la división el número debe ser diferente de cero.

Ejemplos:

1) Dada la ecuación $\underbrace{8+3x}_{\text{miembro}} = \underbrace{7-2x}_{\text{miembro}}$ encontrar una ecuación equivalente.

Solución:

Sumando $2x$ a ambos miembros: $8 + \underbrace{3x + 2x} = 7 \underbrace{- 2x + 2x}$

Sumando los términos semejantes: $8 + 5x = 7 + 0$

Una ecuación equivalente es: $8 + 5x = 7$

2) Dada la ecuación $\underbrace{8+3x}_{\text{miembro}} = \underbrace{7-2x}_{\text{miembro}}$ encontrar una ecuación equivalente.

Solución:

Restando $3x$ a los dos miembros: $8 + \underbrace{3x - 3x} = 7 \underbrace{- 2x - 3x}$

Sumando los términos semejantes: $8 + 0 = 7 - 5x$

Una ecuación equivalente es: $8 = 7 - 5x$

3) Dada la ecuación $\underbrace{4x}_{\text{miembro}} = \underbrace{2x+1}_{\text{miembro}}$ encontrar una ecuación equivalente.

Solución:

Dividiendo entre 4 a los dos miembros: $\dfrac{4x}{4} = \dfrac{2x+1}{4}$

Efectuando la división de $\dfrac{4}{4} = 1$: $x = \dfrac{2x+1}{4}$ es una ecuación equivalente.

4) Dada la ecuación $\dfrac{5+3x}{2} = 7x - 3$ encontrar una ecuación equivalente.

Solución:

Multiplicando por 2 a ambos miembros: $2\left(\dfrac{5+3x}{2}\right) = 2(7x-3)$

Efectuando los productos: $\cancel{2}\left(\dfrac{5+3x}{\cancel{2}}\right) = 14x - 6$

Una ecuación equivalente es: $5 + 3x = 14x - 6$

3.3.2 Transponiendo términos.

Para fines prácticos las operaciones antes ejemplificadas, en términos coloquiales se efectúan de la siguiente forma:

Ejemplos:

1) Dada la ecuación $8 + 3x = 7 - 2x$ encontrar una ecuación equivalente.

Solución:
Se puede trabajar con cualquiera de los dos términos del miembro izquierdo o del derecho, trabajaremos con el miembro izquierdo y el término con x.
El término $2x$ que está **restando** en el lado derecho pasará con la operación inversa, es decir, **sumando** al lado izquierdo: $8 + 3x + 2x = 7$
Sumando los términos semejantes: $8 + 5x = 7$ es una ecuación equivalente.

2) Dada la ecuación $8 + 3x = 7 - 2x$ encontrar una ecuación equivalente.

Solución:
El término 8 está **sumando** en el lado izquierdo pasará con la operación inversa, es decir, **restando** al lado derecho: $3x = 7 - 2x - 8$
Sumando los términos semejantes: $3x = -2x - 1$ es una ecuación equivalente.

3) Dada la ecuación $4x = 2x + 1$ encontrar una ecuación equivalente.

Solución:
Recuerda que se puede trabajar con cualquiera de los dos términos de cualquier miembro.
El 4 está **multiplicando** en el lado izquierdo de la igualdad, pasará con la operación inversa, es decir, **dividiendo** al lado derecho: $x = \frac{2x+1}{4}$ es una ecuación equivalente.

4) Dada la ecuación $\frac{5+3x}{2} = 7x - 3$ encontrar una ecuación equivalente.

Solución:
El 2 que divide en el lado izquierdo de la igualdad, pasará multiplicando al lado derecho: $5 + 3x = 2(7x - 3)$ es una ecuación equivalente.

Ejercicios 3.3

Encontrar una ecuación equivalente para cada una de las siguientes ecuaciones, transponiendo por lo menos un término.

1) $3 + 5x = 7$ 2) $3x = 9 - 4x$ 3) $6w + 1 = 2 - 8w$

4) $5 - 3z = 2 - z$ 5) $2y + 5 - 7y = 12$ 6) $x - 8 = 15 - x - 3$

7) $\frac{1+7x}{3} = 2x - 1$ 8) $10 + \frac{5y-3}{7} = 5y$ 9) $\frac{5(2+w)}{2} + 7w = 20$

10) $\frac{2+x}{3} = \frac{4-3x}{5}$ 11) $3(2w - 4) = 4w$ 12) $\frac{z-4}{7} = \frac{1-z}{2}$

3.4 Resolución de ecuaciones.

Aprendizajes:

✓ *Resuelve ecuaciones lineales en una incógnita a través de los procedimientos siguientes:*
  a) Operaciones con ambos miembros de la igualdad.
  b) Transposición de términos.

✓ *Interpreta el hecho de que las ecuaciones lineales expresan una **condición que debe satisfacer un valor buscado**, como lo que permite modelar diversas situaciones.*

Resolver una ecuación es encontrar el valor o valores de la variable involucrada, de tal forma que al sustituirlo en la ecuación, hace verdadera la igualdad.

Como procedimiento general para resolver ecuaciones lineales o también llamadas ecuaciones de primer grado se deben seguir los siguientes pasos:

1. Se reducen los términos semejantes, cuando es posible.
2. Se hace la transposición de términos (aplicando inverso aditivo o multiplicativo).
3. Se reducen términos semejantes, hasta donde sea posible.
4. Se despeja la incógnita, dividiendo ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de la incógnita (inverso multiplicativo), y se simplifica.

Este procedimiento también es conocido como **despeje** de la variable en una ecuación.

Estos pasos los ejemplificaremos con diferentes ecuaciones, desde las más sencillas a las más complejas.

3.4.1 Resolución de ecuaciones de la forma $ax = b$

Forma 1: Operando con ambos miembros de la igualdad.

Se dividen ambos términos por el coeficiente de x (inverso multiplicativo)

Ejemplos:

1) $5x = 15$ 2) $4x = 9$ 3) $-2x = 10$

$$\frac{5x}{5}=\frac{15}{5} \qquad \frac{4x}{4}=\frac{9}{4} \qquad \frac{-2x}{-2}=\frac{10}{-2}$$

Soluciones: $x = 3$ $\qquad x=\frac{9}{4}$ $\qquad x = -5$

Forma 2: Transposición de términos.

"El coeficiente de x está **multiplicando**, pasará **dividiendo** al otro lado de la igualdad".

Ejemplos:

1) $5x = 15$

$x = \frac{15}{5}$

$x = 3$

2) $4x = 9$

$x = \frac{9}{4}$

3) $-2x = 10$

$x = \frac{10}{-2}$

$x = -5$

Puedes elegir el método que más se te facilite, el resultado es el mismo.

COMPROBACIONES:

1) $5x = 15$

$5(3) = 15$

$15 = 15$ ✓

2) $4x = 9$

$4\left(\frac{9}{4}\right) = 9$

$9 = 9$ ✓

3) $-2x = 10$

$-2(-5) = 10$

$10 = 10$ ✓

3.4.2 Resolución de ecuaciones de la forma $ax + b = c$

Forma 1: Operando con ambos miembros de la igualdad.

1º) Se resta o suma el término b en ambos lados, esto, porque está sumando o restando en el miembro izquierdo (inverso aditivo).
2º) Se dividen ambos miembros por a que es el coeficiente de x (inverso multiplicativo)

Ejemplos:

	1) $3x + 2 = 23$	2) $5x - 3 = 12$	3) $-2x + 5 = 10$
1º)	$3x + 2 - 2 = 23 - 2$	$5x - 3 + 3 = 12 + 3$	$-2x + 5 - 5 = 10 - 5$
	$3x + 0 = 21$	$5x + 0 = 15$	$-2x + 0 = 5$
	$3x = 21$	$5x = 15$	$-2x = 5$
2º)	$\frac{3x}{3}=\frac{21}{3}$	$\frac{5x}{5}=\frac{15}{5}$	$\frac{-2x}{-2}=\frac{5}{-2}$
Soluciones:	$x = 7$	$x = 3$	$x = -\frac{5}{2}$

Forma 2: Transposición de términos.
1º) El término b que esté sumando o restando pasará con la operación inversa al otro lado de la igualdad.
2º) a es el coeficiente de x, está multiplicando, pasará dividiendo al otro lado de la igualdad.

	1) $3x + 2 = 23$	2) $5x - 3 = 12$	3) $-2x + 5 = 10$
1º)	$3x = 23 - 2$	$5x = 12 + 3$	$-2x = 10 - 5$
2º)	$x = \frac{21}{3}$	$x = \frac{15}{5}$	$x = \frac{5}{-2}$
Soluciones:	$x = 7$	$x = 3$	$x = -\frac{5}{2}$

COMPROBACIONES:

1) $3x + 2 = 23$	2) $5x - 3 = 12$	3) $-2x + 5 = 10$
$3(7) + 2 = 23$	$5(3) - 3 = 12$	$-2\left(-\frac{5}{2}\right) + 5 = 10$
$21 + 2 = 23$	$15 - 3 = 12$	$5 + 5 = 10$
$23 = 23$ ✓	$12 = 12$ ✓	$10 = 10$ ✓

3.4.3 Resolución de ecuaciones de la forma $ax + bx + c = d$

Forma 1: Operando con ambos miembros de la igualdad.

1º) Se reducen los términos semejantes $ax + bx$, y obtenemos la forma anterior.
2º) Se siguen los pasos de la forma anterior $ax + b = c$.

Ejemplos:

	1) $\underbrace{4x + 2x} + 7 = 13$	2) $\underbrace{x + 9x} - 1 = 8$	3) $\underbrace{6x - 2x} + 3 = -9$
1º)	$6x + 7 = 13$	$10x - 1 = 8$	$4x + 3 = -9$
2º)	$6x + 7 - 7 = 13 - 7$	$10x - 1 + 1 = 8 + 1$	$4x + 3 - 3 = -9 - 3$
	$6x + 0 = 6$	$10x + 0 = 9$	$4x + 0 = -12$
	$\frac{6x}{6} = \frac{6}{6}$	$\frac{10x}{10} = \frac{9}{10}$	$\frac{4x}{4} = \frac{-12}{4}$
Soluciones:	$x = 1$	$x = \frac{9}{10}$	$x = -3$

Forma 2: Transposición de términos.
1º) Se reducen los términos semejantes $ax + bx$, y obtenemos la forma anterior.
2º) Se siguen los pasos de la forma anterior $ax + b = c$ transponiendo términos.

Ejemplos:

	1) $\underbrace{4x + 2x} + 7 = 13$	2) $\underbrace{x + 9x} - 1 = 8$	3) $\underbrace{6x - 2x} + 3 = -9$
1º)	$6x + 7 = 13$	$10x - 1 = 8$	$4x + 3 = -9$

2º)	$6x = 13 - 7$	$10x = 8 + 1$	$4x = -9 - 3$
	$x = \frac{6}{6}$	$x = \frac{9}{10}$	$x = \frac{-12}{4}$
	$x = 1$		$x = -3$

A lo largo de nuestra experiencia hemos observado que por diferentes causas, la mayoría de los alumnos prefieren usar la ***Transposición de términos*** *para resolver una ecuación. Por tal razón, las siguientes ecuaciones las resolveremos de la forma coloquial, sólo transponiendo términos.*

3.4.4 Resolución de ecuaciones de la forma $a(x + b) = c(x + d)$

1º) Se aplica la ley distributiva en ambos lados de la igualdad, es decir, se efectúan los productos.
2º) Se transponen los términos semejantes de un lado de la igualdad, el que más te convenga.
3º) Se reducen los términos semejantes.
4º) El coeficiente de x pasará dividiendo al otro lado de la igualdad.

Ejemplos:

	1) $5(x + 2) = 3(x + 7)$	2) $4(x + 2) = -9(x - 1)$	3) $-6(x - 3) = 2(x - 8)$
1º)	$5x + 10 = 3x + 21$	$4x + 8 = -9x + 9$	$-6x + 18 = 2x - 16$
2º)	$5x - 3x = 21 - 10$	$4x + 9x = 9 - 8$	$-6x - 2x = -16 - 18$
3º)	$2x = 11$	$13x = 1$	$-8x = -34$
4º)	$x = \frac{11}{2}$	$x = \frac{1}{13}$	$x = \frac{-34}{-8}$
			$x = \frac{17}{4}$

COMPROBACIONES:

1) $5(x + 2) = 3(x + 7)$	2) $4(x + 2) = -9(x - 1)$	3) $-6(x - 3) = 2(x - 8)$
$5(\frac{11}{2} + 2) = 3(\frac{11}{2} + 7)$	$4(\frac{1}{13} + 2) = -9(\frac{1}{13} - 1)$	$-6(\frac{17}{4} - 3) = 2(\frac{17}{4} - 8)$
$5(\frac{15}{2}) = 3(\frac{25}{2})$	$4(\frac{27}{13}) = -9(-\frac{12}{13})$	$-6(\frac{5}{4}) = 2(-\frac{15}{4})$
$\frac{75}{2} = \frac{75}{2}$ ✓	$\frac{108}{13} = \frac{108}{13}$ ✓	$-\frac{30}{4} = -\frac{30}{4}$ ✓

3.4.5 Resolución de ecuaciones de la forma $\frac{ax}{b} = \frac{c}{d}$

1º) El número b que está dividiendo pasará multiplicando sólo al numerador c.
2º) El coeficiente de x está multiplicando, pasará dividiendo al otro lado de la igualdad.

Ejemplos:

	1) $\frac{3x}{5} = \frac{2}{7}$	2) $\frac{-2x}{3} = \frac{1}{4}$	3) $\frac{5x}{-4} = \frac{-3}{8}$
1º)	$3x = \frac{5(2)}{7}$	$-2x = \frac{3(1)}{4}$	$5x = \frac{-4(-3)}{8}$
2º)	$x = \frac{10}{3(7)}$	$x = \frac{3}{-2(4)}$	$x = \frac{12}{5(8)}$
Soluciones:	$x = \frac{10}{21}$	$x = -\frac{3}{8}$	$x = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$

3.4.6 Resolución de ecuaciones de la forma $\frac{ax}{b} + c = \frac{dx}{e}$

Hay que quitar los denominadores, una forma de resolverse puede ser**:**

1º) Se multiplica a toda la ecuación por el mínimo común múltiplo de b y de e, que son los denominadores.
2º) Se realiza el producto término por término y las divisiones donde sea necesario.
3º) Se agrupan los términos semejantes y se resuelve la ecuación siguiendo los pasos ya practicados.

Ejemplos:

	1) $\frac{5x}{3} + 4 = \frac{2x}{5}$	2) $\frac{-3w}{2} - 7 = \frac{5w}{4}$	3) $\frac{5y}{-4} + 9 = \frac{-3y}{7}$
1º)	mcm(3 , 5) = 15	mcm(2 , 4) = 4	mcm(– 4 , 7) = – 28
	$15\left(\frac{5x}{3} + 4 = \frac{2x}{5}\right)$	$4\left(\frac{-3w}{2} - 7 = \frac{5w}{4}\right)$	$-28\left(\frac{5y}{-4} + 9 = \frac{-3y}{7}\right)$

2º) Se realizan productos y divisiones necesarias.

	$\frac{15(5x)}{3} + 15(4) = \frac{15(2x)}{5}$	$\frac{4(-3w)}{2} - 4(7) = \frac{4(5w)}{4}$	$\frac{-28(5y)}{-4} + -28(9) = \frac{-28(-3y)}{7}$
	$5(5x) + 60 = 3(2x)$	$2(-3w) - 28 = 1(5w)$	$7(5y) - 252 = -4(-3y)$
	$25x + 60 = 6x$	$-6w - 28 = 5w$	$35y - 252 = 12y$
3º)	$25x - 6x = -60$	$-6w - 5w = 28$	$35y - 12y = 252$
	$19x = -60$	$-11w = 28$	$23y = 252$
Soluciones:	$x = \frac{-60}{19} = -\frac{60}{19}$	$w = \frac{28}{-11} = -\frac{28}{11}$	$y = \frac{252}{23}$

COMPROBACIONES:

1) $\frac{5x}{3} + 4 = \frac{2x}{5}$

$\frac{5\left(-\frac{60}{19}\right)}{3} + 4 = \frac{2\left(-\frac{60}{19}\right)}{5}$

$\frac{\left(-\frac{300}{19}\right)}{3} + 4 = \frac{\left(-\frac{120}{19}\right)}{5}$

$-\frac{300}{57} + 4 = -\frac{120}{95}$

$-\frac{72}{57} = -\frac{120}{95}$

$-\frac{24}{19} = -\frac{24}{19}$ ✓

2) $\frac{-3w}{2} - 7 = \frac{5w}{4}$

$\frac{-3\left(-\frac{28}{11}\right)}{2} - 7 = \frac{5\left(-\frac{28}{11}\right)}{4}$

$\frac{\left(\frac{84}{11}\right)}{2} - 7 = \frac{\left(-\frac{140}{11}\right)}{4}$

$\frac{84}{22} - 7 = -\frac{140}{44}$

$-\frac{70}{22} = -\frac{70}{22}$

$-\frac{35}{11} = -\frac{35}{11}$ ✓

3.4.7 Resolución de ecuaciones de la forma $(x + b)^2 = (x + c)(x + d)$

Para resolver este tipo de ecuaciones **hay que quitar los paréntesis**, para esto, tienes que recordar que $a^2 = a(a)$. Aplicando esta propiedad se tiene que $(x + b)^2 = (x + b)(x + b)$ y se efectúa el producto.
Se desarrolla el producto del lado derecho y se continúa resolviendo ejecutando los procedimientos antes vistos.

Ejemplos:

1) Resolver la ecuación $(x + 2)^2 = (x + 4)(x + 1)$

Por definición de potencia: $(x + 2)^2 = (x + 2)(x + 2)$
Sustituyéndolo: $(x + 2)(x + 2) = (x + 4)(x + 1)$
Desarrollando los productos: $x(x) + 2x + 2x + 2(2) = x(x) + 4x + x(1) + 4(1)$
$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 5x + 4$
Agrupando términos semejantes: $x^2 + 4x - x^2 - 5x = 4 - 4$
$-x = 0$
La solución es: $x = 0$

2) Resolver la ecuación $(y - 1)^2 = (y + 5)(y - 2)$

Por definición de potencia: $(y - 1)^2 = (y - 1)(y - 1)$
Sustituyéndolo: $(y - 1)(y - 1) = (y + 5)(y - 2)$
Haciendo los productos: $y(y) + y(-1) - 1(y) - 1(-1) = y(y) + y(-2) + 5y + 5(-2)$
$y^2 - y - y + 1 = y^2 - 2y + 5y - 10$
$y^2 - 2y + 1 = y^2 + 3y - 10$

Agrupando términos semejantes: $y^2 - 2y - y^2 - 3y = -10 - 1$

$-5y = -11$

La solución es: $y = \dfrac{-11}{-5} = \dfrac{11}{5}$

3) Resolver la ecuación $(-w + 3)^2 = (-w - 2)(-w + 4)$

Por definición de potencia: $(-w + 3)^2 = (-w + 3)(-w + 3)$

Sustituyéndolo: $(-w + 3)(-w + 3) = (-w - 2)(-w + 4)$

Haciendo los productos: $-w(-w) - w(3) + 3(-w) + 3(3) = -w(-w) - w(4) - 2(-w) - 2(4)$

$(-w)^2 - 3w - 3w + 9 = (-w)^2 - 4w + 2w - 8$

$w^2 - 6w + 9 = w^2 - 2w - 8$

Agrupando términos semejantes: $w^2 - 6w - w^2 + 2w = -8 - 9$

$-4w = -17$

La solución es: $w = \dfrac{-17}{-4} = \dfrac{17}{4}$

COMPROBACIONES:

1) $(x + 2)^2 = (x + 4)(x + 1)$

$(0 + 2)^2 = (0 + 4)(0 + 1)$

$2^2 = (4)(1)$

$4 = 4$ ✓

2) $(y - 1)^2 = (y + 5)(y - 2)$

$(\frac{11}{5} - 1)^2 = (\frac{11}{5} + 5)(\frac{11}{5} - 2)$

$\left(\frac{6}{5}\right)^2 = \left(\frac{36}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)$

$\frac{36}{25} = \frac{36}{25}$ ✓

3.4.8 Ecuaciones de la forma $\dfrac{x+a}{x+b} = \dfrac{x+c}{x+d}$

1º) Los denominadores como están dividiendo pasarán multiplicando en forma cruzada.

2º) Se realizan los productos de cada lado de la igualdad y se continúa el despeje.

Ejemplos:

1) Encuentra la solución de $\dfrac{x+2}{x+4} = \dfrac{x+5}{x+3}$

1º) $(x + 2)(x + 3) = (x + 5)(x + 4)$

2º) $x(x) + x(3) + 2(x) + 2(3) = x(x) + x(4) + 5(x) + 5(4)$

$x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 4x + 5x + 20$

$x^2 + 5x + 6 = x^2 + 9x + 20$

$x^2 + 5x - x^2 - 9x = 20 - 6$

$-4x = 14$

Solución: $x = \dfrac{14}{-4} = -\dfrac{7}{2}$

2) Resolver la ecuación $\dfrac{w-1}{w+7} = \dfrac{w+6}{w-2}$

1º) $(w - 1)(w - 2) = (w + 6)(w + 7)$

2º) $w(w) + w(-2) - 1(w) - 1(-2) = w(w) + w(7) + 6(w) + 6(7)$

$$w^2 - 2w - w + 2 = w^2 + 7w + 6w + 42$$
$$w^2 - 3w + 2 = w^2 + 13w + 42$$
$$w^2 - 3w - w^2 - 13w = 42 - 2$$
$$-16w = 40$$

Solución: $w = \dfrac{40}{-16} = -\dfrac{5}{2}$

COMPROBACIONES:

1) $\dfrac{x+2}{x+4} = \dfrac{x+5}{x+3}$

$$\frac{-\frac{7}{2}+2}{-\frac{7}{2}+4} = \frac{-\frac{7}{2}+5}{-\frac{7}{2}+3}$$
$$\frac{\frac{-3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}}$$
$$-\frac{6}{2} = -\frac{6}{2}$$
$$-3 = -3 \checkmark$$

2) $\dfrac{w-1}{w+7} = \dfrac{w+6}{w-2}$

$$\frac{-\frac{5}{2}-1}{-\frac{5}{2}+7} = \frac{-\frac{5}{2}+6}{-\frac{5}{2}-2}$$
$$\frac{\frac{-7}{2}}{\frac{9}{2}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{-9}{2}}$$
$$-\frac{14}{18} = -\frac{14}{18}$$
$$-\frac{7}{9} = -\frac{7}{9} \checkmark$$

Ejercicios 3.4

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones, la comprobación es optativa.

1) $4x = 32$ 2) $7y = -21$ 3) $-6z = 14$

4) $5w + 2 = 12$ 5) $7a - 4 = 24$ 6) $-3b + 6 = 27$

7) $8x + 5x + 15 = 28$ 8) $4y + 3y - 20 = 8$ 9) $2w - 9w + 5 = -9$

10) $7(x - 3) = 2(x + 3)$ 11) $5(z + 1) = -3(z - 4)$ 12) $-4(b - 5) = 2(b - 6)$

13) $\dfrac{5x}{3} = \dfrac{10}{9}$ 14) $\dfrac{-8y}{5} = \dfrac{3}{10}$ 15) $\dfrac{2a}{-9} = \dfrac{-5}{12}$

16) $\dfrac{2x}{7} + 6 = \dfrac{x}{14}$ 17) $\dfrac{-6w}{5} - 2 = \dfrac{3w}{4}$ 18) $\dfrac{y}{-9} + 8 = \dfrac{-4y}{3}$

19) $(x + 4)^2 = (x + 2)(x + 7)$ 20) $(y - 3)^2 = (y + 1)(y - 8)$

21) $(w+3)^2 = (w-1)(w-4)$

22) $\dfrac{b-1}{b+2} = \dfrac{b-3}{b+4}$

23) $\dfrac{x+1}{x+5} = \dfrac{x+7}{x+2}$

24) $\dfrac{w-2}{w+1} = \dfrac{w+3}{w-6}$

25) $6 + 3w - 12 = 4 + 2w - 13$

26) $3a - 5 + a = 7(2a-5)$

27) $\dfrac{1}{2}b - \dfrac{4}{5}b + 3 = b$

28) $3x + 2(4x-2) = \dfrac{20x+6}{2}$

29) $\dfrac{4y+8}{3} = \dfrac{4}{5}$

30) $9 + \dfrac{4-3x}{2} = 25$

31) $y - \dfrac{4y}{3} = 5 - \dfrac{y}{2}$

32) $\dfrac{2w+1}{4} + 3w + 2 = \dfrac{1-w}{3}$

33) $\dfrac{6x+7}{5} - \dfrac{3x-6}{15} = \dfrac{10x-8}{30}$

34) $(2z+3)^2 = 4z - 7 + 4(z^2-2)$

35) $\dfrac{2x-8}{3} + 5 = 6 - \dfrac{3x-5}{4}$

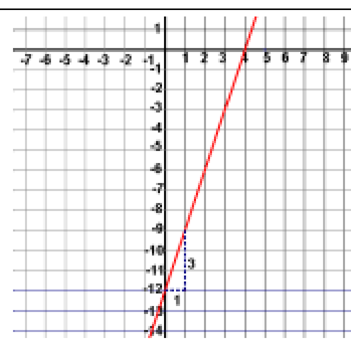
3.5 Interpretación gráfica de la solución de una ecuación lineal en una incógnita.

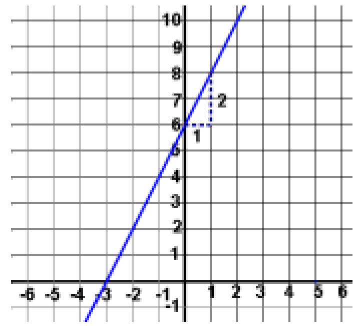
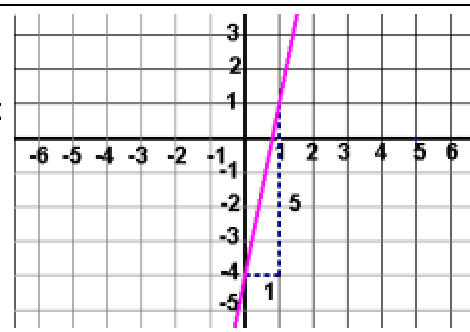
Aprendizaje:

El alumno asocia de manera adecuada, la solución de una ecuación de la forma $\mathbf{ax + b = 0}$*, con la abscisa del punto en donde la gráfica de la función* $\mathbf{y = ax + b}$*, corta al eje* $\mathbf{x}$*.*

En la sección 3.2 c) vimos que $y = ax + b$ es la Función Lineal asociada a la Ecuación $ax + b = 0$.

Veamos algunos ejemplos donde se resolverá una ecuación de la forma $ax + b = 0$ y se trazará la gráfica de la Función Lineal asociada $y = ax + b$.

ECUACIÓN	GRÁFICA DE LA FUNCIÓN LINEAL
$3x - 12 = 0$ Solución: $3x = 12$ $x = \dfrac{12}{3}$ $x = 4$	Haciendo $0 = y$ Tenemos $3x - 12 = y$ Que es lo mismo que: $y = 3x - 12$ Su gráfica es:  ¿Por dónde corta la recta al eje X? ____________

$2x + 6 = 0$ Solución: $2x = -6$ $x = \frac{-6}{2}$ $x = -3$	Haciendo $0 = y$ Tenemos $2x + 6 = y$ Que es lo mismo que: $y = 2x + 6$ Su gráfica es:  ¿Por dónde corta la recta al eje X? ____________
$5x - 4 = 0$ Solución: $5x = 4$ $x = \frac{4}{5}$	Haciendo $0 = y$ Tenemos $5x - 4 = y$ Que es lo mismo que: $y = 5x - 4$ Su gráfica es:  ¿Por dónde corta la recta al eje X? ____________

Con estos tres ejercicios creemos que ya te diste cuenta que la solución de la **Ecuación** $ax + b = 0$, es el valor por donde la recta asociada a su **Función Lineal** $y = ax + b$ corta al eje de las X's.

Ejemplos:

1) ¿Cuál es la Función Lineal asociada a la ecuación $x - 2(3 - 2x) + 8 = 5 - x$?
Solución:
Lo primero que tenemos que hacer es escribir la ecuación en la forma $ax + b = 0$.
Aplicaremos las reglas aritméticas y de transposición de términos.

$$x - 2(3 - 2x) + 8 = 5 - x$$
$$x - 6 + 4x + 8 = 5 - x$$
$$5x + 2 - 5 + x = 0$$
$$6x - 3 = 0 \quad \text{es de la forma } ax + b = 0$$

Esta es una ecuación equivalente a $x - 2(3 - 2x) + 8 = 5 - x$.

Su Función Lineal asociada es: $y = 6x - 3$

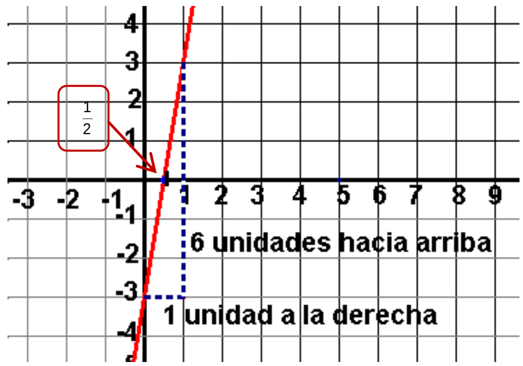
2) ¿Por dónde corta la gráfica de la Función Lineal $y = 6x - 3$ al eje de las X's?
Solución:
La gráfica de la Función Lineal $y = 6x - 3$ es una línea recta, y cortará al eje X en la solución de la Ecuación: $6x - 3 = 0$

Resolviéndola: $6x = 3$

$$x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3) Trazar la gráfica de la Función Lineal $y = 6x - 3$ para verificar el resultado anterior.

Solución:



Para graficar:
Ordenada al origen $b = -3$
Pendiente:

$$a = \frac{6\text{ u hacia arriba}}{1\text{u a la derecha}}$$

La recta corta al eje X en $\frac{1}{2}$ que es la solución de la ecuación.

4) Encuentra la Función Lineal asociada a la ecuación $2x - \frac{x-3}{2} = \frac{2x-1}{3} + 2$ y verifícalo trazando su gráfica.

Solución:

Lo primero que tenemos que hacer es escribir la ecuación en la forma $ax + b = 0$.

Para esto, hay que quitar denominadores y aplicar las reglas aritméticas y de transposición de términos.

$$2x - \frac{x-3}{2} = \frac{2x-1}{3} + 2 \quad \text{m.c.m.}(2\ ,\ 3) = 6$$

$$6\left(2x - \frac{x-3}{2} = \frac{2x-1}{3} + 2\right)$$

$$6(2x) - 6\left(\frac{x-3}{2}\right) = 6\left(\frac{2x-1}{3}\right) + 6(2)$$

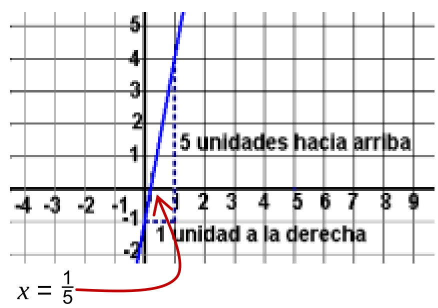
$$12x - 3(x-3) = 2(2x-1) + 12$$

$$12x - 3x + 9 = 4x - 2 + 12$$

$$9x + 9 = 4x + 10$$

$$9x + 9 - 4x - 10 = 0$$

$$5x - 1 = 0$$



La Función Lineal asociada es: $y = 5x - 1$, se traza su gráfica y se continúa resolviendo la ecuación $5x - 1 = 0$, donde se tiene que $x = \frac{1}{5}$.

5) Encuentra la intersección de la Función Lineal $3x - 2y + 12 = 0$ con el eje de las X's.

Solución:

Despejando a y, escribimos la Función Lineal en la forma $y = ax + b$.

$3x - 2y + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x + 12 = 2y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3x+12}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3x}{2} + 6$

Entonces, la Función Lineal es $y = \frac{3x}{2} + 6$, su ecuación asociada es: $\frac{3x}{2} + 6 = 0$

Al resolverla: $\frac{3x}{2} = -6 \quad \Rightarrow \quad 3x = 2(-6) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-12}{3}$, la solución es $x = -4$.

La intersección de la recta o Función Lineal $3x - 2y + 12 = 0$ con el eje X es -4.

Lo puedes verificar trazando la gráfica de $3x - 2y + 12 = 0$.

Ejercicios 3.5

I. Encuentra la Función Lineal asociada a cada una de las siguientes ecuaciones y la intersección con el eje X, verifícalo trazando su gráfica.

1) $2x - 5 = 3$ 2) $4x + 7 = x - 1$ 3) $5 = 2 - 3x$

4) $5(x + 2) = 20$ 5) $3(x - 4) + 6 = 9$ 6) $-2(x + 3) + 5(x + 2) = x + 5$

7) $\frac{x}{3} + 2 = -x$ 8) $\frac{x-6}{3} + 6 = 5 - \frac{2x+5}{4}$

II. Dadas las siguientes Funciones Lineales, para cada una encuentra su intersección con el eje X.

1) $y = 2x - 6$ 2) $y = -3x - 9$ 3) $y = x + 2$ 4) $y = -\frac{2}{3}x - 4$

5) $x - 2y + 8 = 0$ 6) $5x - 3y = 15$ 7) $3x - y + 2 = 0$ 8) $2x - 3 = 1 - y$

3.6 Planteamiento y resolución de problemas de diversos contextos que dan lugar a ecuaciones lineales en una incógnita.

Aprendizajes: El alumno:

- ✓ *Interpreta en el contexto del problema, el significado de la solución encontrada, en particular cuando se trata de números negativos o fracciones.*
- ✓ *Redacta el contexto de una situación que corresponda a un modelo expresado por medio de una ecuación lineal con una incógnita, o bien, incorpora los cambios pertinentes en la redacción de una situación dada, al introducir modificaciones en el modelo que la representaba.*
- ✓ *Relaciona o reduce un problema dado con otro que ya ha resuelto o que resulta más sencillo de trabajar.*

Anteriormente vimos como plantear problemas y como resolver una ecuación, ahora que cuentas con ciertas habilidades, ya puedes resolver los problemas de la sección 3.1. Sin embargo, veamos algunos ejemplos más con la intención de seguir desarrollando nuevas habilidades y tener un panorama más amplio al momento de resolver otros problemas.

Ejemplo 1) Luis preguntó a su primo Marco cuántos años tenía, y Marco le contestó:
"Si al triple de los años que tendré dentro de tres años le restas el triple de los años que tenía hace tres años, tendrás los años que tengo ahora" ¿Cuántos años tiene Marco?

Solución:
Ordenando los datos.

		Edad de Marco
Pasado	Hace 3 años	x – 3 años
Presente	Edad actual de Marco	x años
Futuro	Dentro de tres años	x + 3 años

"Si el triple de (x + 3) le restas el triple de (x – 3), tendrás x años"
La ecuación es: $3(x + 3) - 3(x - 3) = x$
Se resuelve la ecuación: $3x + 9 - 3x + 9 = x$
$18 = x$
Respuesta: Marco tiene 18 años.

COMPROBACIÓN:
Afirmaciones de Marco:
El triple de los años que tendré dentro de tres años: 3(18 + 3) = 63
El triple de los años que tenía hace tres años: 3(18 – 3) = 45
Se restan: 63 – 45 = 18 son los años que tengo ahora.

Ejemplo 2) Un comerciante tiene dos clases de aceite, la primera de \$20 el litro y la segunda de \$28 el litro. ¿Cuántos litros hay que poner de cada clase de aceite para obtener 60 litros de mezcla a \$25 el litro?

Solución:
Ordenando los datos.

	Clase A	**Clase B**	**Mezcla**
Precio por litro	\$20	\$28	\$25
Número de litros	y	60 - y	60
Costo total de:	\$ 20y	\$ 28(60 – y)	\$ 25(60)

Costo del aceite clase A + Costo del aceite clase B = Costo de la mezcla
La ecuación es: $20y + 28(60 - y) = 25(60)$

Resolviéndola: $20y + 1680 - 28y = 1500$

$-8y = 1500 - 1680$

$y = \dfrac{-180}{-8}$

$y = 22.5$ litros de la clase A.

Respuesta: Hay que mesclar 22.5 litros de a \$20 y 37.5 litros de a \$28.

COMPROBACIÓN:
22.5 litros de \$20 = \$450
37.5 litros de a \$28 = \$1050
La suma es \$1500 que es el costo total de la mezcla.

Ejemplo 3) Jorge conduce su motocicleta a una velocidad de 60 km/h, quiere alcanzar a Omar que también conduce otra motocicleta a una velocidad de 45 km/h y le lleva una ventaja de 2 horas. ¿Cuánto tardará Jorge en alcanzar a Omar?

Solución:

Distancia recorrida por Jorge: $60t$ donde t es el tiempo en horas.
Distancia recorrida por Omar: $45(t + 2)$ ya que lleva una ventaja de 2 horas.
Se quiere que las distancias sean iguales.
La ecuación es: $60t = 45(t + 2)$
Resolviéndola: $60t = 45t + 90$

$60t - 45t = 90$

$15t = 90$

$t = \dfrac{90}{15}$

$t = 6$

Respuesta: Jorge tardará 6 horas para alcanzar a Omar.

COMPROBACIÓN:
En 6 horas Jorge recorrerá 60(6) = 360 km.
En 6 horas Omar recorrerá 45(6) = 270 km., pero como lleva una ventaja de 2 horas 45(2) = 90, en total Omar recorrerá 270 + 90 = 360 km.

Ejemplo 4) La longitud de un salón de fiestas rectangular es 5 metros más que el triple de su ancho. Si el perímetro es de 122 metros, hallar las dimensiones del salón.

Longitud o largo = $3a + 5$

Solución:

Perímetro = $a + (3a + 5) + a + (3a + 5) = 8a + 10$

La ecuación es: $122 = 8a + 10$

Resolviéndola: $122 - 10 = 8a$

$$\frac{112}{8} = a$$

$$a = 14 \text{ metros de ancho}$$

El largo es $3a + 5 = 3(14) + 5 = 47$ metros.

Respuesta: El ancho del salón es 14 metros, y su largo es de 47 metros.

COMPROBACIÓN:

El perímetro es 2 anchos + dos largos = 2(14) + 2(47) = 28 + 94 = 122 metros.

Ejemplo 5) En una librería, Ana compra un libro con la tercera parte de su dinero y un cómic con las dos terceras partes de lo que le quedaba. Al salir de la librería tenía $20. ¿Cuánto dinero tenía Ana?

Solución:

Supongamos que Ana tenía "p" pesos.

El libro le costó: $\frac{1}{3}p$ y le sobra de $\frac{2}{3}p$.

El cómic le costó: $\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}p\right) = \frac{4}{9}p$.

Al salir de la librería tenía $20, es decir, "costo libro + costo del comic + $20" es el dinero que tenía Ana.

La ecuación es: $\frac{1}{3}p + \frac{4}{9}p + 20 = p$

Resolviendo la ecuación:

El m.c.m.(3 , 9) = 9, se multiplica toda la ecuación por 9:

$$9\left(\frac{1}{3}p + \frac{4}{9}p + 20 = p\right)$$

$$3p + 4p + 180 = 9p$$

$$180 = 9p - 7p$$

$$180 = 2p$$

$$p = 90$$

Respuesta: Ana tenía $90.

Puedes realizar la comprobación.

Ejemplo 6) En un número de dos dígitos, el dígito de las unidades supera en tres al digito de las decenas. Si el número se divide entre la suma de sus dígitos el cociente es 4 y el residuo es 3. Encontrar el número.

Solución:
Recuerda que todo número se puede expresar en notación desarrollada, por ejemplo: 63 = 6(10) + 3(1), 482 = 4(100) + 8(10) + 2(1), etc.

Recuerda otro concepto de la división: $\frac{79}{5}$ se expresa como $5\overline{)79}$ con cociente 15, 29, residuo 4, es decir, 79 = 15(5) + 4 donde 4 es el residuo.

En nuestro caso, supongamos que el dígito de las decenas es d.
Entonces, el dígito de las unidades será $d + 3$.
El número buscado en notación desarrollada es: $d(10) + (d + 3)(1)$

El problema dice: “Si el número se divide entre la suma de sus dígitos el cociente es 4 y el residuo es 3”

El enunciado en símbolos: $\frac{d(10)+(d+3)(1)}{d+(d+3)}$, al realizar la división se tendrá que:

$d(10) + (d + 3)(1) = 4(d + (d + 3)) + 3$ es la ecuación a resolver.

Resolviéndola: $10d + d + 3 = 4(d + d + 3) + 3$

$11d = 4(2d + 3) + 3 – 3$

$11d – 8d = 12$

$3d = 12$

$d = 4$ es el dígito de las decenas.

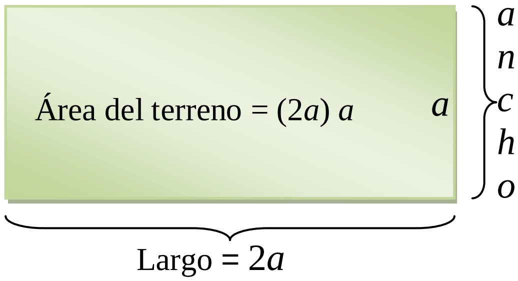
Entonces, el dígito de las unidades será $d + 3 = 4 + 3 = 7$

Respuesta: El número es 47.

COMPROBACIÓN:
“Si el número se divide entre la suma de sus dígitos el cociente es 4 y el residuo es 3”: $\frac{47}{4+7} = \frac{47}{11}$ se expresa como $11\overline{)47}$ con cociente 4, residuo 3 es decir, 47 = 4(11) + 3

Ejemplo 7) Un terreno rectangular tiene el doble de largo que de ancho. Si el largo se disminuye en 6 metros y el ancho se aumenta en 4 metros, y la superficie del terreno no varía. Hallar las dimensiones del terreno.

Solución:



Dimensiones del terreno modificado:
El largo se disminuye en 6 metros = $2a - 6$
El ancho se aumenta en 4 metros = $a + 4$
Área del terreno modificado: $(2a - 6)(a + 4)$

La ecuación se construye del enunciado "La superficie del terreno no varía", esto quiere decir que sus áreas siguen siendo iguales:

Área del terreno original = área del terreno modificado.

La ecuación es: $(2a)\,a = (2a - 6)(a + 4)$

Resolviéndola: $2a^2 = 2a^2 + 8a - 6a - 24$

$$2a^2 - 2a^2 = 8a - 6a - 24$$

$$0 = 2a - 24$$

$$24 = 2a$$

$$12 = a$$

Respuesta: Las dimensiones del terreno son 12 metros de ancho y 24 de largo.

Puedes realizar la comprobación.

Ejemplo 8) El vendedor de una tienda de discos ha tenido un buen día. Tenía unos discos un poco antiguos, difíciles de vender, pero su primer cliente le compró la mitad de ellos y uno más. El segundo cliente se llevó la mitad de los restantes y otro más. Lo bueno es que el tercer cliente compró la mitad de los discos que quedaban más un disco.

Finalmente, el cuarto cliente quiso también la mitad de los discos restantes y uno más. De esta forma, nuestro vendedor acabó con todos sus discos antiguos. ¿Cuántos discos tenía al principio?

Solución:

Supongamos que el vendedor tenía x discos en la tienda.

1er cliente) Compro la mitad de los discos + un disco: $\frac{x}{2} + 1$

Al vendedor le quedaron $\frac{x}{2} - 1$ discos.

2º cliente) Compró la mitad de los restantes + un disco: $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-1\right)+1$

Al vendedor le quedan: $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-1\right)-1=\frac{x}{4}-\frac{1}{2}-1=\frac{x}{4}-\frac{3}{2}$

3er cliente) Compró la mitad de los restantes + un disco: $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{2}\right)+1$

Al vendedor le quedan: $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{2}\right)-1=\frac{x}{8}-\frac{3}{4}-1=\frac{x}{8}-\frac{7}{4}$

4º cliente) Compró la mitad de los restantes + un disco: $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{8}-\frac{7}{4}\right)+1$

Al vendedor le quedan: $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{8}-\frac{7}{4}\right)-1=\frac{x}{16}-\frac{7}{8}-1=\frac{x}{16}-\frac{15}{8}$

Como terminó de vender todos los discos entonces:

$\frac{x}{16}-\frac{15}{8}=0$ es la ecuación a resolver

Resolviéndola:

El m.c.m.(16 , 8) = 16, se multiplica toda la ecuación por 16.

$$16\left(\frac{x}{16}-\frac{15}{8}=0\right)$$

$$16\left(\frac{x}{16}\right)-16\left(\frac{15}{8}\right)=0$$

$$x-30=0$$

$$x=30$$

Respuesta: El vendedor tenía 30 discos en la tienda.

COMPROBACIÓN:

1er cliente) Compro la mitad de los discos + un disco: $\frac{30}{2}+1=15+1=16$

Le quedan $30-16=14$

2º cliente) Compro la mitad de los discos + un disco: $\frac{14}{2}+1=7+1=8$

Le quedan $14-8=6$

3er cliente) Compro la mitad de los discos + un disco: $\frac{6}{2}+1=3+1=4$

Le quedan $6-4=2$

4º cliente) Compro la mitad de los discos + un disco: $\frac{2}{2}+1=1+1=2$

Le quedan $2-2=0$

Ejemplo 9) Un pintor puede pintar una casa el sólo en 55 horas. Su ayudante puede pintar la misma casa en 66 horas. ¿Cuánto tardarán en pintar la casa al trabajar juntos?

Solución:

Supongamos que juntos pintan la casa en t horas.

Si el pintor tarda 55 horas en pintar la casa, entonces, en una hora pintará $\frac{1}{55}$ parte de la casa.

El ayudante tarda 66 horas, en una hora pintará $\frac{1}{66}$ parte de la casa.

Si juntos tardan t horas, entonces, en una hora pintarán $\frac{1}{t}$ parte de la casa.

Planteamiento de la ecuación:

En una hora la parte pintada de la casa será:

Parte del pintor + parte del ayudante = parte de los dos juntos.

$$\frac{1}{55} + \frac{1}{66} = \frac{1}{t}$$

Resolviéndola:

$$\frac{6+5}{330} = \frac{1}{t}$$

$$t(11) = 330(1)$$

$$t = \frac{330}{11} = 30$$

Respuesta: Juntos pintarán la casa en 30 horas.

Ejemplo 10) Un laboratorista desea saber cuántos litros de agua debe agregar a 6 litros de una solución de ácido clorhídrico al 6% y agua. Para producir otra solución al 4% de ácido.

Solución:

La solución es de 6 litros de ácido clorhídrico al 6% y agua, significa que el 6%(6) es de ácido, es decir, 0.06(6) = 0.36 es ácido.

Por otro lado, se desea agregar l litros de agua a los 6 litros de solución, y la nueva solución debe de contener 4% de ácido, esto se representa por: 0.04(6 + l).

Planteamiento de la ecuación:

$$6\%(6) + 0\%(l) = 4\%(6 + l)$$
$$0.36 + 0 = 0.04(6 + l)$$
$$0.36 = 0.04(6) + 0.04l$$
$$0.36 - 0.24 = 0.04l$$
$$\frac{0.12}{0.04} = l$$
$$3 = l$$

Respuesta: Debe agregar 3 litros de agua a la solución.

Ejemplo 11) ¿Qué cantidad de agua debe evaporarse de una solución salina al 4% para hacer que la concentración se aumente al 6%. (Da el resultado en términos del volumen inicial V)

Solución:

Supongamos que se evapora x cantidad de agua.

Solución salina al 4% de sal: cantidad de sal 4%(V).

Solución concentrada al 6% de sal: cantidad de sal 6%($V - x$).

Planteamiento de la ecuación:

Cantidad de sal en la solución al 4% = Cantidad de sal en la solución concentrada al 6%

$$4\%(V) = 6\%(V - x)$$
$$0.04(V) = 0.06(V - x)$$
$$0.04V = 0.06V - 0.06x$$
$$0.06x = 0.06V - 0.04V$$
$$x = \frac{0.02V}{0.06}$$
$$x = \frac{1}{3}V$$

Respuesta: Se debe evaporar $\frac{1}{3}V$ del volumen de la solución.

Ejemplo 12) Una empresa fabrica un producto que tiene costos variables de $6 por unidad y costos fijos de $80. Cada unidad tiene un precio de venta de $10. Determinar el número de unidades que deben vender para que la compañía obtenga utilidades de $60 y calcular el margen por unidad.

Solución:

Sea v el número de unidades que deben ser vendidas.

Ingresos totales = Cantidad vendida × precio de venta: $10v$

Costos totales = Costos variables + Costos fijos: $6v + 80$

Planteamiento de la ecuación:

Utilidades = Ingresos totales – Costos totales

$$60 = 10v - (6v + 80)$$

Resolviéndola:

$$10v - (6v + 80) = 60$$
$$4v - 80 = 60$$
$$4v = 140$$
$$v = 35$$

Respuesta: Se necesita vender 35 unidades para obtener utilidades de $60.

Ejercicio 3.6

Para cada uno de los siguientes problemas, plantea el modelo que lo representa y resuélvelo.

1) Encuentra tres números enteros consecutivos cuya suma sea 528.

2) Encuentra el número entero que sumado con su anterior y su siguiente de 702.

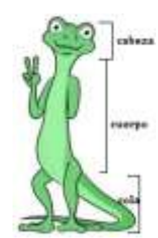
3) Encuentra el número que se quintuplica al sumarle 52.

4) La tercera parte de un número es 30 unidades menor que su doble. ¿Cuál es el número?

5) Si a un número se le resta su tercera parte y se le suma su quinta parte se obtiene como resultado 13. ¿De qué número se trata?

6) Determinar un número natural tal que la mitad del número más su tercera parte sea igual a dicho número disminuido en dos unidades.

7) La cabeza de una lagartija mide 5 cm de largo. La cola mide la longitud de la cabeza más la mitad del cuerpo. También se sabe que el cuerpo mide igual a la cabeza más la cola. ¿Cuánto mide la lagartija?



8) Si a la edad de Alma se le suma su mitad se obtiene la edad de Santiago. ¿Cuál es la edad de Alma si Santiago tiene 18 años?

9) El Sr. Martínez actualmente tiene 24 años más que su hijo, Dentro de 13 años el Sr Martínez tendrá el doble de la edad que tendrá entonces su hijo. Hallar sus edades.

10) Dos ciclistas avanzan uno hacia el otro por una misma carretera. Sus velocidades son de 18 km/h y de 22 km/h, si están separados por 100 km. ¿Cuánto tardarán en encontrarse?

11) Un automóvil sale de una ciudad a una velocidad de 80 km/h, una hora más tarde sale una patrulla en su persecución a una velocidad de 120 km/h. ¿En cuánto tiempo alcanzará la patrulla al automóvil?

12) Para cercar un terreno rectangular se necesitan 300 metros de malla. El largo del terreno es 28 metros más que el ancho. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

13) La suma de la base y la altura de un triángulo es de 29 cm. Encontrar el área del triángulo si su altura mide 5 cm más que el triple de su base.

14) Encontrar cuánto mide cada uno de los ángulos interiores de un triángulo si el segundo ángulo mide 10º más que el primero, y el tercer ángulo mide 10º menos que el doble del segundo.

15) Un hombre recibe una herencia. Gasta un tercio de ella en pagar viejas deudas y pierde dos tercios del resto jugando a las cartas, quedándose sólo con $500,000.
¿De cuánto fue la herencia?

16) Una persona gana $ 600.00 diarios, pero le descuentan $300.00 por cada día que falta al trabajo. Al cabo de 58 días recibe $22 200.00. ¿Cuántos días faltó a trabajar?

17) Un granjero lleva al mercado una cesta de huevos, de tan mala suerte que tropieza y se le rompen 2/5 de la mercancía. Entonces vuelve al gallinero y recoge 21 huevos más, con lo que ahora tiene 1/8 más de la cantidad inicial. ¿Cuántos huevos llevaba al principio?

18) En dos botes hay igual cantidad de aceite. Sacando 34 litros del primero y 80 del segundo, quedan en el primero el triple de litros que en el segundo. ¿Cuántos litros había en cada uno de los botes?

19) Un padre y su hijo van paseando juntos, aunque en cada paso el padre recorre $\frac{4}{5}$ de metro y el hijo recorre $\frac{1}{3}$ de metro en cada paso. ¿Qué distancia han recorrido juntos, si sabemos que el hijo ha dado 700 pasos más que el padre?

20) Marco caminó durante tres días. En el primer día recorrió $\frac{5}{9}$ partes del camino. El segundo día recorrió la mitad de lo que recorrió el primer día. ¿Qué parte del camino recorrió el tercer día?

21) Una jarra de leche está a la mitad de su capacidad. Brenda toma la novena parte de la leche que hay en la jarra, con lo cual en la jarra quedó un litro. ¿Qué capacidad total tiene la jarra?

22) Se tienen tres números consecutivos tales que la diferencia entre los 3/7 del mediano y los 3/10 del menor exceden en 1 a 1/11 del mayor. Encuentra los números.

23) En cierta ocasión Aladino para complacer al Rey le regaló una bolsa con perlas, el Rey muy contento repartió las perlas de la siguiente forma: La mitad de las perlas más una perla se las dio a su esposa, de las perlas restantes la mitad más una, se las regaló a su hija. Y del resto tomó la mitad más una perla y se las regaló a la esposa de su Visir, finalmente él se quedo con 43 perlas. ¿Podrías decir cuántas perlas en total le regaló Aladino al Rey?

24) ESPERARÉ

- No, lo siento mucho, no se puede usted casar con mi hija Laura. Sólo tiene 16 años y usted es tres veces mayor que ella, dice un padre al pretendiente de su hija.
- Pero señor, ¿si yo tuviese sólo dos veces más años que ella, nos dejaría casarnos?
- En este caso, no diría que no.
- Muy bien, no hay problema, me esperaré.

¿Cuánto tiempo tendrá que esperar el novio para casarse? ¿Querrá Laura casarse entonces con él?

25) UN POEMA

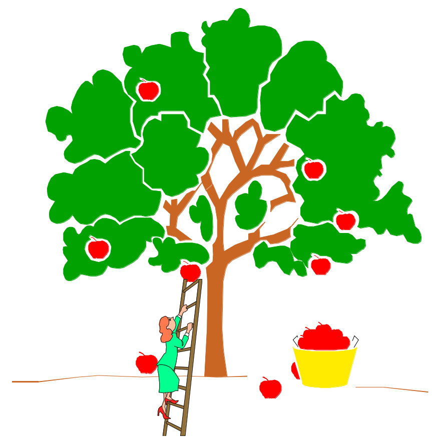
Un collar se rompió mientras jugaban dos enamorados.
Una hilera de perlas se escapó:
La sexta parte al suelo cayó; la quinta parte en el lecho se quedó, un tercio, por la joven se salvó, la décima parte el bien amado recogió, y con seis perlas el cordón quedó.
Dime lector, ¿cuántas perlas tenía el collar de los bienaventurados?

26) Un cajero efectúa tres pagos. En el primero, entrega la mitad de lo que tiene en caja más $2 750.00; en el segundo, un tercio de lo que le queda menos $1 000.00; en el tercero, una cuarta parte de lo que le quedaba más $1 550.00. Si después de estos tres pagos quedan en caja $59 200.00, ¿cuánto había al principio?

27) En tres meses una fábrica de latas de atún ha producido 516 500 latas. ¿Cuántas se produjeron cada mes, sabiendo que cada mes la producción aumento en 5/16, con respecto del mes anterior?

28) La cuarta parte de un terreno tiene sembrado maíz, los 4/7 del terreno están sembrados de trigo, y el resto tiene papas. El maíz ocupa 369 m^2 más que las papas. ¿Cuál es la superficie del terreno?

29) Sandra va al huerto a cortar manzanas. Un vigilante la detiene y a cambio de no delatarla le pide la mitad de las manzanas que lleva más media manzana, Sandra se las da y continúa su camino de regreso a su casa. Pero de nuevo se encuentra con un segundo vigilante y este también para no delatarla le pide la mitad de las manzanas que le quedaron más media manzana, se las da y posteriormente se encontró con un tercer vigilante con el cual le ocurrió lo mismo. Al final sólo le quedan 10 manzanas. ¿Cuántas manzanas cortó al principio?



30) Un comerciante tenía determinada cantidad de dinero, el primer año se gasto \$1000 y aumento el resto con un tercio de éste. Al año siguiente volvió a gastar \$1000 y aumento lo que le quedó en un tercio de esta última. El tercer año gasto de nuevo \$1000 y también aumentó el resto en una tercera parte del resto, finalmente el capital resultante fue el doble del inicial. ¿Qué cantidad tenía al principio el comerciante?

31) Los reyes de una dinastía tuvieron 9 nombres diferentes. La tercera parte de los reyes llevaron el primero de estos nombres, la cuarta parte el segundo, la octava parte el tercero y la doceava parte el cuarto; cada uno de los nombres restantes lo llevó un solo rey. ¿Cuántos fueron los reyes de la dinastía?

32) Dos llaves llenan juntas un depósito en 7 horas. Una de ellas lo llena en 12 horas. ¿En cuánto tiempo lo llena la otra?

33) Tres hermanas se han comido toda la fruta de un frutero y lo han hecho de la siguiente manera: la mayor se ha comido la mitad de la fruta mas dos piezas; la segunda, la mitad del resto más dos piezas; y la tercera sólo ha podido comer 4 manzanas porque no quedaba más fruta. ¿Cuántas piezas de fruta había en el frutero?

34) ¿Qué cantidad de agua debe agregarse a un litro de alcohol de 95% de concentración, para que la solución resultante tenga una concentración del 75%?

35) ¿Qué cantidad de agua debe evaporarse de una solución salina del 5% de concentración para aumentar la concentración al 10%?(da el resultado en términos del volumen inicial V)

36) Un farmacéutico debe preparar 15 ml de gotas especiales para un paciente con glaucoma. La solución debe tener 2% de ingrediente activo, pero sólo tiene disponibles soluciones al 10% y al 1%. ¿Qué cantidad de cada solución debe usar para completar la receta?

A U T O E V A L U A C I O N

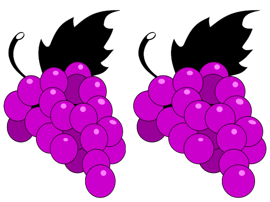
Con esta evaluación verificarás si realmente has adquirido los conocimientos básicos necesarios para aprobar esta unidad. Para hacer esta evaluación, es necesario que la resuelvas sin consultar algún texto durante la solución.

Esperamos que esta autoevaluación la termines en 1½ horas como máximo.

RESOLVER LAS SIGUIENTES ECUACIONES:

1) $5y + 1 = 8 - 4(7 - 2y)$ 2) $x + \frac{2x}{3} - \frac{3x+11}{6} = 4$

3) Una niña se ha comido 120 uvas en 5 días, de tal forma que cada día comía 5 uvas más que el día anterior. ¿Cuántas uvas se comió el primer día? Escribe el modelo matemático y resuélvelo.



4) En cierta ocasión Aladino para complacer al Rey le regaló una bolsa con perlas, el Rey muy contento repartió las perlas de la siguiente forma: La mitad de las perlas más una perla se las dio a su esposa, de las perlas restantes la mitad más una se las regaló a su hija y del resto tomó la mitad más una perla y se las regaló a la esposa de su Visir, finalmente él se quedo con 21 perlas. ¿Podrías decir cuántas perlas en total le regaló Aladino al Rey?

5) Despejar "b" en $4 - 2(x - 3b) = ax + b$.

6) Dada la ecuación $3 - 2(5 - x) = 5x - 1$ representa gráficamente su solución, en un plano cartesiano.

ESCALA:
Para considerar si has adquirido los aprendizajes de esta unidad, es necesario que resuelvas correctamente todos los ejercicios.
Si resuelves bien 3 o menos, tienes que volver a estudiar con mayor conciencia esta unidad, y hacer todos los ejercicios propuestos en esta guía complementando con los del Banco de Reactivos.
Si contestas bien 4 ejercicios has logrado aprender sólo los conocimientos básicos, pero si resolviste 5 o 6 vas avanzando bien en tu estudio y estás listo para continuar con la unidad 4.